PRÁCTICA Nº 12

APLICACIONES LINEALES I: Expresión matricial de una aplicación lineal.

Con esta práctica se pretende revisar la definición de aplicación lineal, así como el cálculo de la expresión matricial de una aplicación lineal respecto de las bases del dominio y codominio de dicha aplicación. Analizaremos también cómo afecta el cambio de base a la matriz asociada a una aplicación lineal.

1.- APLICACIÓN LINEAL.

Dados V y V' dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, una aplicación $f: V \to V'$ se dice que es una <u>aplicación lineal</u> si verifica:

1. $f(u + v) = f(u) + f(v), \forall u, v \in V.$
2. $f(\alpha u) = \alpha f(u), \forall \alpha \in K, \forall u \in V.$

En Mathematica trabajaremos con las coordenadas de los vectores respecto de una base y no con los vectores. Para definir una aplicación lineal debemos de seguir las reglas habituales de Mathematica:

nombre[variable_]:= expresión

Teniendo en cuenta que en este caso tendremos como variable un vector y como expresión otro vector:

Ejemplo 1. Definir en Mathematica la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por $f(x, y, z) = (2x, x + y, 3x + y - z, y + 5z)$ y calcular $f(3,2,1)$:

In[]:= **f[{x_,y_,z_}]:={2x,x+y,3x+y-z,y+5z};**

f[{3,2,1}]

Out[]:= `{6, 5, 10, 7}`

■

En la práctica para estudiar si f es aplicación lineal se suele usar la definición la siguiente caracterización:

La aplicación f: $V \to V'$ es lineal si, y solo si,

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v),\ \forall \alpha, \beta \in \ldots, \forall u, v \in \mathrm{V}.$$

Ejemplo 2. Estudiar si la aplicación del ejemplo anterior es lineal.

In[]:=
```
f[{x_,y_,z_}]:={2x,x+y,3x+y-z,y+5z};
Simplify[f[a*{x1,y1,z1}+b*{x2,y2,z2}]]==
      Simplify[a*f[{x1,y1,z1}]+b*f[{x2,y2,z2}]]
```

Out[]:= `True`

■

Ejemplo 3. Estudiar si la aplicación g: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $g(x, y, z) = (xy, x + y)$ es lineal.

In[]:=
```
g[{x_,y_,z_}]:={x*y,x+y};
Simplify[g[a*{x1,y1,z1}+b*{x2,y2,z2}]] ==
      Simplify[a*g[{x1,y1,z1}] + b*g[{x2,y2,z2}]]
```

Out[]:=
```
{a(x + b x1), a(x + b x1 + y + b y1)} ==
      {a x + b x1, a x + b x1 + a y + b y1}
```

■

2. EXPRESIÓN MATRICIAL DE UNA APLICACIÓN LINEAL.

Sea f: $V \to V'$ una aplicación lineal y sea $B = \{e_1, e_2,..., e_n\}$ una base de V. Entonces f está totalmente determinada por las imágenes de los vectores de B, es decir, $f(e_1)$, $f(e_2)$,..., $f(e_n)$, pues dado un vector x de V de coordenadas $x \equiv (x_1,...,x_n)_B$, entonces,

$$f(x) = f(x_1e_1 + ... + x_ne_n) = x_1f(e_1) + ... + x_nf(e_n)$$

Sea ahora $B'=\{u_1,..., u_m\}$ base de V' y consideremos las coordenadas de los vectores $f(e_1)$,..., $f(e_n)$ respecto de B':

$$\begin{array}{l} f(e_1) \equiv (a_{11},\ldots, a_{m1})_{B'} \\ f(e_2) \equiv (a_{12},\ldots, a_{m2})_{B'} \\ \quad\vdots \\ f(e_n) \equiv (a_{1n},\ldots, a_{mn})_{B'} \end{array}$$

De esta forma se tiene:

$$f(x) \equiv (a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n,\ a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n, ...,\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n)_{B'}$$

Ahora bien, si denotamos a las coordenadas de $f(x)$ por $f(x) \equiv (y_1,..., y_m)_{B'}$, entonces se obtiene:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{aligned}$$

o matricialmente:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Esta expresión recibe el nombre de ecuación matricial de una aplicación lineal f respecto de las bases B y B'. La matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

recibe el nombre de matriz asociada a f respecto de las bases B y B' que denotaremos por $A = \mathrm{M}_{B,B'}(f)$. (Notar que el número de columnas es igual a la dimensión de V y su número de filas igual a la dimensión de V'). Así, para calcular la matriz asociada podemos dividirlo en los siguientes pasos:

Paso 1: Calculamos las imágenes de los vectores de la base B de V: $f(e_1), ... , f(e_n)$.

Paso 2: Calculamos las coordenadas de lo obtenido en el paso anterior respecto de la base B' de V'.

Paso 3: Construimos la matriz A, por columnas, siendo las columnas de A, las coordenadas que hemos calculado en 2.

Recordemos que si f es un endomorfismo, $V' = V$, y la base B' de V' se toma también como B.

Ejemplo 4. **C**alcular la expresión matricial de la aplicación lineal f: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ dada por $f(x, y, z) = (2x, x + y, 3x + y - z, y + 5z)$ respecto de las bases $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ y $B' = \{(1, 2, 3, 0), (2, 4, 6, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\}$.

In[]:=
```
f[{x_,y_,z_}]:={2x,x+y,3x+y-z,y+5z}
B= {{1,1,1},{1,1,0},{1,0,0}};
B'={{1,2,3,0},{2,4,6,1},{1,0,0,0},{0,1,0,0}};
```

```
A= Transpose[Table[ LinearSolve[Transpose[B'],
        f[B[[i]]]],{i,1,3}]];
MatrixForm[A]
```

Out[]:=

$$\begin{pmatrix} -11 & \frac{-2}{3} & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & \frac{-2}{3} & -1 \end{pmatrix}$$

■

3. RELACIÓN ENTRE MATRICES ASOCIADAS A DISTINTAS BASES.

Sea f: $V \rightarrow V$' una aplicación lineal con $n = \dim(V)$, $m = \dim(V')$, y consideremos B y $\overline{B}$ bases de V y B' y $\overline{B}$' bases de V', si A es la matriz asociada a f respecto de B y B' y C es la matriz asociada a f respecto de B y $\overline{B}$', se tiene que C y A son matrices equivalentes, además $C = Q^{-1}AP$, donde P es la matriz del cambio de base en V de $\overline{B}$ a B y Q es la matriz del cambio de base en V' de B' a $\overline{B}$'. En el caso particular de un endomorfismo y tomando la misma base en el espacio de partida y en el de llegada, la relación entre A y C es $C = P^{-1}AP$.

Dos matrices cuadradas A y C para las que existe una matriz regular P de forma que $C = P^{-1}AP$ se dice que son semejantes.

Proposición.

1. Dos matrices son equivalentes si, y solo si, son matrices asociadas a la misma aplicación lineal respecto de distintas bases.
2. Dos matrices son semejantes si, y solo si, son matrices asociadas al mismo endomorfismo respecto de distintas bases.

■

Ejemplo 5. Comprobar la relación entre la matriz asociada a f respecto de las bases anteriores y la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas.

In[]:=

```
f[{x_,y_,z_}]:={2x,x+y,3x+y-z,y+5z}
Bc3= IdentityMatrix[3];
Bc4=IdentityMatrix[4];
A1= Transpose[Table[ LinearSolve[Transpose[Bc4],
        f[Bc3[[i]]]],{i,1,3}]];
B= {{1,1,1},{1,1,0},{1,0,0}};
B'={{1,2,3,0},{2,4,6,1},{1,0,0,0},{0,1,0,0}};
A2= Transpose[Table[ LinearSolve[Transpose[B'],
        f[B[[i]]]],{i,1,3}]];
P=Transpose[Table[LinearSolve[Transpose[B],Bc3[[i]]]
        ,{i,3}]];
Q=Transpose[Table[LinearSolve[Transpose[B'],Bc4[[i]]]
        ,{i,4}]];
```

```
Inverse[Q].A2.P==A1
```

Out[]:= `True`

■